OCU-E Discussion Paper Series

経済の集計を利用した

サプライチェーン経済の構築

堀江進也，入谷純

2024年4月12日

Discussion Paper No.011

Graduate School of Economics, Management, and Information Science,
Onomichi City University

経済の集計を利用したサプライチェーン経済の構築

堀江 進也　　　　入谷純
尾道市立大学　　　大阪学院大学

Very Preliminary

概要

本稿の目標は二つある。第一は，中間財部門を含む多部門経済からサプライチェーンを抽出し複数サプライチェーン経済に再編することである。第二は複数サプライチェーン経済をマクロ的な一財生産経済に集計することである。本稿が提示する経済の集計手続きは，二つの整合性の要請を満たす。第一の整合性は，集計の前後における「生産要素と生産物の価値の保存」である。第二は，集計前後の経済における均衡論的整合性である。われわれが提案する集計作業のいま一つの特徴は，2 つの整合性を満たしながら，各部門の TFP をマクロ的 TFP に集計する手続を明らかにすることである。これにより，特に中間生産物部門の TFP の変化が集計 TFP に及ぼす影響が大きいことが判明する。

Keywords: 経済の集計, サプライチェーン経済, TFP

JEL classifications: E13, E23, D21, O41

1 はじめに

中間生産物の経済における重要性は広く知られている（OECD (2010) 参照)。日本も例外ではなく，中間生産物の経済に占める割合は極めて大きい。実際，産業連関データを見ると，2015 年の中間生産物の総額は 469 兆円であり，最終需要額 548 兆円の 85 ％と大きな部分を占めている*1。中間生産物を陽表的にモデル内に取り込む作業は典型的に産業連関論において行われている。しかも，産業連関論における一つの産業とは多くの生産者から構成される一連の生産活動，つまり，一つのサプライチェーンに他ならない。Doi et. al. (2021) は、この点に着目して以下を示した。

(T1) サプライチェーン内にある各セクターを一つの産業に統合するとき，産業を合理的な選択をする「1 企業」（以下，SC 企業）と扱える．

(T2) (T1) による二人の SC 企業からなる集計経済の均衡がもとの 3 部門経済の均衡と整合性を有する。

(T3) 2 サプライチェーンからなる経済が 1 部門のマクロ経済に集計できる。

本稿では，n 部門 m 最終財 2 本源的生産要素経済（$n \geqq m$) という一般的状況で，サプライチェーンをどう捉えるかから議論を始める。

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする。N は企業のインデックスの集合である。各部門は 1 種類の財を生産し，$\{1, \ldots, m\}$ 内の各部門は最終生産物を生産する。いま集合 C を次の性質を満たすものとして定義する。

(i) $C \subset N \times N$, $(i, j) \in C$ なら第 i 部門の生産物が第 j 部門の投入物になる。

(ii) $C^k = \{(i, j) \in C |\ \exists j_1, \ldots, j_h \text{ such that } j_1 = i, j_2 = j, j_h = k, (j_i, j_i + 1) \in C, i = 1, 2, \ldots, h-1\}$, $k = 1, 2, \ldots, m$。C^k は最終財第 k 財を生産するためのサプライチェーン。

(iii) $C^1 \cup C^2 \cup \cdots \cup C^m = C$。$C$ が $C^1, \ldots, C^m$ の分割でないことに注意。

(iv) $\forall i \in N\ \exists j \in N : (i, j) \in C$ or $(j, i) \in C$。生産者はサプライチェーンに属している。実際には，生産者のなかで中間生産物を必要としない者がいる可能性があるがここでは取り扱わない。

このようなサプライチェーンの扱い方は多くのメリットを持っている。

$$O_i = \{j \in N |\ (i, j) \in C\}, i = 1, 2, \ldots, n$$

を定義すれば，$\{1,2,\ldots,m\} \subset O_i$ であれば，基盤的な財を作る企業だということになる。以下でコブダグラスの生産関数を想定するのでこの点は更に強調される。さらに基盤的な企業が順次並んでいる，産出投入係数表の三角化の如き状況も表現できる。つまり，本稿では $n=4, m=2$ とし，

$$C = \{(3,1),(4,1),(3,2),(4,2),(4,3)\}$$

の場合を考察する。このとき，個々のサプライチェーンは

$$\begin{aligned} C^1 &= \{(4,3),(3,1),(4,1)\} : \text{1st supply chain} \\ C^2 &= \{(4,3),(3,2),(4,2)\} : \text{2nd supply chain} \end{aligned}$$

である。さらに，

$$O_1 = O_2 = \emptyset,\ O_3 = \{1,2\},\ O_4 = \{1,2,3\}$$

となって，第 4 財が基盤的中間生産物となっている。

本稿で我々が取り扱う経済はサプライチェーン C を有する 4 財，2 中間生産物，2 本源的生産要素（資本と労働），1 家計経済 $(4,2,2,1)$ 経済である。

2　モデル

本稿で取り扱うのは生産 4 部門経済である。

仮定 1　生産関数を

$$\begin{cases} Y_i = F_i(K_i, L_i, M_{i3}, M_{i4}) & = A_i {K_i}^{\theta_i} {L_i}^{\eta_i} {M_{i3}}^{\delta_i} {M_{i4}}^{\gamma_i},\ i = 1,2 \\ M_3 = F_3(K_3, L_3, M_{34}) & = A_3 {K_3}^{\theta_3} {L_3}^{\eta_3} {M_{34}}^{\gamma_3}, \\ M_4 = F_4(K_4, L_4) & = A_4 {K_4}^{\theta_4} {L_4}^{\eta_4}, \end{cases} \tag{1}$$

とする。各パラメータは正値で，$\theta_i+\eta_i+\gamma_i+\delta_i = 1, i = 1,2,\ \theta_3+\eta_3+\gamma_3 = 1,\ \theta_4+\eta_4 = 1$ である。A_i は第 i 部門の TFP である，$i = 1,2,3,4$。

M_{ij} は第 i セクターで用いられる第 j 中間生産物の投入量である，$(j,i) \in C$。$i \in \{1,2\}$ とする。第 i 部門は第 i 最終生産物を生産技術 F_i を用いて生産する。K_i, L_i, M_{ij} はそれぞれ，第 i 部門で用いられる資本，労働，第 j 中間投入である，$j = 3,4$。中間投入として用いられるものは第 $3,4$ 部門で生産される第 3 財と第 4 財である。第 3 財の生産にも第 4 財が中間生産物として用いられる。

資本と労働はそれぞれ同質的であるとする。

また，略記法として，

$$F_{iK}=\frac{\partial F_i}{\partial K_i},\quad F_{iL}=\frac{\partial F_i}{\partial L_i}, i=1,2,3,4,\quad F_{jM_3}=\frac{\partial F_j}{\partial M_{j3}}, F_{jM_4}=\frac{\partial F_j}{\partial M_{j4}}, j=1,2$$

$$f_i(k_i,m_{i3},m_{i4})=F_i(k_i,1,m_{i3},m_{i4}),\ k_i=\frac{K_i}{L_i}, m_{ij}=\frac{M_{ij}}{L_i}, j=3,4, i=1,2$$

$$f_3(k_3,m_{34})=F_3(k_3,1,m_{34}),\quad k_3=\frac{K_3}{L_3},\ m_{34}=\frac{M_{34}}{L_3}$$

$$f_4(k_4)=F_4(k_4,1),\quad k_4=\frac{K_4}{L_4}$$

を採用する。さらに，微分は例えば，$f_{ik}=\frac{\partial f_i}{\partial k_i}$，$F_{iK}=\frac{\partial F_i}{\partial K_i}$ のように表す。

価格はすべてレンタル料に対する比率で表す。生産物価格レンタル比率を $p_i, i=1,2,3,4$，賃金レンタル比率をそれぞれ ω と書く。

2.1 中間財生産部門

第 4 部門（中間財生産部門）から議論を始める。ω を正の賃金レンタル比率として，利潤最大化は

$$\max_{K_4,L_4} p_4F_4(K_4,L_4)-K_4-\omega L_4$$

である。必要条件を整理すると，

$$\omega=\frac{f_4(k_4)-k_4f_{4k}(k_4)}{f_{4k}(k_4)}=\frac{1-\theta_4}{\theta_4}k_4$$

$$k_4=\frac{\theta_4}{\eta_4}\omega \tag{2}$$

$$p_4=\frac{1}{f_{4k}}=\frac{1}{\theta_4A_4}{k_4}^{1-\theta_4}=\frac{1}{A_4}\left(\frac{1}{\theta_4}\right)^{\theta_4}\left(\frac{\omega}{\eta_4}\right)^{\eta_4} \tag{3}$$

となる。(3) 式より，p_4 は ω によって決まることが判る。

第 3 部門の生産関数は

$$M_3=F_3(K_3,L_3,M_{34})=A_3{K_3}^{\theta_3}{L_3}^{\eta_3}{M_{34}}^{\gamma_3},$$

であった。賃金レンタル比率 ω, 第 4 部門の生産物価格レンタル比率 p_4 が与えられているとする。第 3 生産者の生産する財（中間財）の価格・レンタル比率を p_3 とする。利潤最大化は

$$\max_{K_3,L_3} p_3F_3(K_3,L_3,M_{34})-K_3-\omega L_4-p_4M_{34}$$

である。必要条件を整理すると，

$$
\begin{aligned}
k_3 &= \frac{\theta_3}{\eta_3}\omega && (4)\\
m_{34} &= \frac{\gamma_3}{\eta_3}\frac{\omega}{p_4} && (5)\\
p_3 &= \frac{1}{f_{3k}} = \frac{1}{\theta_3 A_3}{k_3}^{1-\theta_3}{m_{34}}^{-\gamma_3} = \frac{1}{A_3}\left(\frac{1}{\theta_3}\right)^{\theta_3}\left(\frac{\omega}{\eta_3}\right)^{\eta_3}\left(\frac{p_4}{\gamma_3}\right)^{\gamma_3} && (6)\\
&= \frac{1}{A_3}\left(\frac{1}{\gamma_3 A_4}\right)^{\gamma_3}\left(\frac{1}{\theta_3}\right)^{\theta_3}\left(\frac{1}{\theta_4}\right)^{\theta_4\gamma_3}\left(\frac{\omega}{\eta_3}\right)^{\eta_3}\left(\frac{\omega}{\eta_4}\right)^{\eta_4\gamma_3} && (7)
\end{aligned}
$$

となる。(3) と (7) 式より，p_3 は ω によって決まることが判る。

2.2 最終財生産部門

財価格レンタル比率を $p_i = p_i, i = 1, 2$ とする。賃金レンタル比率を ω とすれば，p_3, p_4 は (3) と (7) 式で与えられる。第 i 部門の最大化問題は

$$\max_{K_i, L_i, M_{i3}, M_{i4}} p_i F_i(K_i, L_i, M_{i3}, M_{i4}) - K_i - \omega L_i - p_3 M_{i3} - p_4 M_{i4}$$

である。必要条件を整理すると，

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{f_i - k_i f_{ik} - m_{i3} f_{im_3} - m_{i4} f_{im_4}}{f_{ik}} = \frac{1}{\theta_i}k_i - k_i - m_{i3}\frac{f_{im_3}}{f_{ik}} - m_{i4}\frac{f_{im_4}}{f_{ik}}\\
p_3 &= \frac{f_{im_3}}{f_{ik}} = \frac{\delta_i}{\theta_i}\frac{k_i}{m_{i3}} \text{ よって } p_3 m_{i3} = \frac{\delta_i}{\theta_i}k_i\\
p_4 &= \frac{f_{im_4}}{f_{ik}} = \frac{\gamma_i}{\theta_i}\frac{k_i}{m_{i4}} \text{ よって } p_4 m_{i4} = \frac{\gamma_i}{\theta_i}k_i
\end{aligned}
$$

である。最初の式に第 2，第 3 式を代入して，

$$k_i(\omega) = \frac{\theta_i}{\eta_i}\omega, \quad m_{i3}(\omega) = \frac{\delta_i}{\eta_i}\frac{\omega}{p_3(\omega)}, \quad m_{i4}(\omega) = \frac{\gamma_i}{\eta_i}\frac{\omega}{p_4(\omega)} \tag{8}$$

となる。財価格レンタル比率 $p_i(\omega)$ はつぎの通りである。

$$
\begin{aligned}
p_i(\omega) &= \frac{1}{f_{ik}(k_i(\omega), m_{i3}(\omega), m_{i4}(\omega))} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{1}{\theta_i}\right)^{\theta_i}\left(\frac{\omega}{\eta_i}\right)^{\eta_i}\left(\frac{p_3}{\delta_i}\right)^{\delta_i}\left(\frac{p_4}{\gamma_i}\right)^{\gamma_i} && (9)\\
&= \frac{1}{A_i}\left(\frac{1}{\delta_i A_3}\right)^{\delta_i}\left(\frac{1}{\gamma_i A_4}\right)^{\gamma_i}\left(\frac{1}{\gamma_3 A_4}\right)^{\gamma_3\delta_i}\left(\frac{1}{\theta_i}\right)^{\theta_i}\left(\frac{1}{\theta_3}\right)^{\theta_3\delta_i}\left(\frac{1}{\theta_4}\right)^{\theta_4\gamma_3\delta_i+\theta_4\gamma_i}\\
&\quad\times\left(\frac{\omega}{\eta_i}\right)^{\eta_i}\left(\frac{\omega}{\eta_3}\right)^{\eta_3\delta_i}\left(\frac{\omega}{\eta_4}\right)^{\eta_4\gamma_i+\eta_4\delta_3\delta_i} && (10)
\end{aligned}
$$

以上の (4), (7), (8) より，$k_i, p_i, i = 1, 2, 3, m_{j3}, m_{j4}, j = 1, 2$ は ω の関数となる。

2.3 サイズの決定

前節で $k_i, p_i, i=1,2,3,4,\ m_{j3}, m_{j4}, j=1,2$ は ω の関数として得られた。ω は任意に与えられた正値である。物量はすべて対労働比率，価格はすべて対レンタル比率である。一次同次生産関数では，生産サイズの決定は生産部門からはできない。

ここで生産のサイズ決定を考察しよう。生産規模の決定はもっぱら需要側からなされる。(K, L) を所与の資本と労働力の初期保有とする。

仮定 2　資本レンタルで測った国民所得 $K+\omega L$ の α_i の割合が第 i 財に支出されるとする, $i=1,2$。α_1, α_2 を**支出係数**と呼ぶ。$\alpha_i > 0, i=1,2,\ \alpha_1+\alpha_2=1$ である。

そこで，第 i 部門 $(i=1,2)$ について，

$$p_i f_i\left(k_i(\omega), m_{i3}(\omega), m_{i4}(\omega)\right) L_i(\omega) = \alpha_i(K+\omega L)$$

となるように $L_i(\omega)$ を定める。生産サイズの決定と財の需給バランスとは同義であることに注意せよ。(8) を用い，$p_i = 1/f_{ik}(k_i(\omega), m_{i3}(\omega), m_{i4}(\omega))$ より，左辺を変形すると

$$p_i f_i(k_i(\omega), m_{i3}(\omega), m_{i4}(\omega)) L_i(\omega) = \frac{k_i(\omega)}{\theta_i} L_i(\omega) = \frac{K_i(\omega)}{\theta_i} = \frac{\omega}{\eta_i} L_i(\omega)$$

である。ここで，$K_i(\omega) = k_i(\omega) L_i(\omega)$ は $K_i(\omega)$ の定義である。したがって，

$$L_i(\omega) = \frac{\eta_i}{\omega}\alpha_i(K+\omega L) \tag{11}$$
$$K_i(\omega) = \theta_i \alpha_i (K+\omega L) \tag{12}$$
$$M_{i3}(\omega) = \frac{\alpha_i \delta_i}{p_3}(K+\omega L) \tag{13}$$
$$M_{i4}(\omega) = \frac{\alpha_i \gamma_i}{p_4}(K+\omega L) \tag{14}$$
$$Y_i(\omega) = A_i \alpha_i (K+\omega L) {\theta_i}^{\theta_i} \left(\frac{\eta_i}{\omega}\right)^{\eta_i} \left(\frac{\delta_i}{p_3}\right)^{\delta_i} \left(\frac{\gamma_i}{p_4}\right)^{\gamma_i} \tag{15}$$

である, $i=1,2$。

第 3 部門のサイズ決定は次のようである。M_3 を

$$M_3(\omega) = M_{13}(\omega) + M_{23}(\omega) = \frac{\alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2}{p_3}(K+\omega L)$$

と定義する。さらに，

$$M_3(\omega) = f_3(k_3(\omega), m_{34}(\omega)) L_3(\omega)$$

を成立させるように $L_3(\omega)$ を決定する。これによって，

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2}{p_3}(K+\omega L)=f_3(k_3(\omega),m_{34}(\omega))L(\omega)\\
&p_3(\omega)f_3(k_3(\omega),m_{34}(\omega))=\frac{k_3(\omega)}{\theta_3}=\frac{\omega}{\eta_3}\ \text{だから}\\
&(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)(K+\omega L)\frac{\eta_3}{\omega}=L_3(\omega)
\end{aligned}$$

を得る。さらに，第 3 部門の資本需要 $K_3(\omega)$ は

$$\begin{aligned}
K_3(\omega)=k_3(\omega)L_3(\omega)&=\frac{\theta_3}{\eta_3}\omega(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)(K+\omega L)\frac{\eta_3}{\omega}\\
&=\theta_3(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)(K+\omega L)
\end{aligned}$$

となる。さらに，

$$\begin{aligned}
M_{34}(\omega)=m_{34}(\omega)L_3(\omega)&=\frac{\gamma_3}{\eta_3}\frac{\omega}{p_4}(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)(K+\omega L)\frac{\eta_3}{\omega}\\
&=\frac{\gamma_3}{p_4}(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)(K+\omega L)
\end{aligned}$$

は第 3 部門の第 4 財への需要となる。

次は第 4 部門である。以上によって，$M_4(\omega)=\sum_{j=1}^{3}M_{i4}(\omega)$ とすれば，$M_4(\omega)$ は第 4 財の総需要である。

$$M_4(\omega)=\left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{p_4}+\frac{\alpha_2\gamma_2}{p_4}+\frac{\gamma_3(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)}{p_4}\right)(K+\omega L)$$

したがって，

$$M_4(\omega)=f_4(k_4(\omega))L_4(\omega)$$

を成立させるように $L_4(\omega)$ を決定できる。$L_4(\omega)$ は第 4 部門の労働需要である。これによって，

$$\begin{aligned}
f_4(k_4(\omega))L_4(\omega)&=\left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{p_4}+\frac{\alpha_2\gamma_2}{p_4}+\frac{\gamma_3(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)}{p_4}\right)(K+\omega L)\\
L_4(\omega)&=\frac{1}{p_4f_4(k_4(\omega))}\left(\alpha_1(\gamma_1+\gamma_3\delta_1)+\alpha_2(\gamma_2+\gamma_3\delta_2)\right)(K+\omega L)\\
&=\frac{1}{k_4(\omega)/\theta_4}\left(\alpha_1(\gamma_1+\gamma_3\delta_1)+\alpha_2(\gamma_2+\gamma_3\delta_2)\right)(K+\omega L)\\
&=\frac{\eta_4}{\omega}\left(\alpha_1(\gamma_1+\gamma_3\delta_1)+\alpha_2(\gamma_2+\gamma_3\delta_2)\right)(K+\omega L)
\end{aligned}$$

が得られる。したがって，

$$\begin{aligned}K_4(\omega) &= k_4(\omega)L_4(\omega) = \left(\frac{\theta_4}{\eta_4}\omega\right)L_4(\omega)\\ &= (\alpha_1(\gamma_1+\gamma_3\delta_1)+\alpha_2(\gamma_2+\gamma_3\delta_2))\,\theta_4(K+\omega L)\end{aligned}$$

となる。

以上で，各部門の要素需要と財の供給がすべて得られた。ワルラス法則の成立を示しておこう。ω を任意の正の数として，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^4 K_i(\omega)-K\right)+\omega\left(\sum_{i=1}^4 L_i(\omega)-L\right) &= \sum_{i=1}^4\{K_i(\omega)+\omega L_i(\omega)\}-(K+\omega L)\\ &= p_1(\omega)Y_1(\omega)-p_3(\omega)M_{13}(\omega)-p_4(\omega)M_{14}(\omega)\\ &\quad +p_2(\omega)Y_2(\omega)-p_3(\omega)M_{23}(\omega)-p_4(\omega)M_{24}(\omega)\\ &\quad +p_3(\omega)M_3(\omega)-p_4M_{34}(\omega)+p_4(\omega)M_4(\omega)\\ &\quad -(K+\omega L)\\ &= p_1Y_1+p_2Y_2-p_3(M_{13}+M_{23}-M_3)\\ &\quad -p_4(M_{14}+M_{24}+M_{34}-M_4)-(K+\omega L)\\ &= p_1Y_1-\alpha_1(K+\omega L)+p_2Y_2-\alpha_2(K+\omega L)=0\end{aligned}$$

である。

2.4 均衡

サプライチェーン C を有する $(4,2,2,1)$ 経済の均衡を次のように定義する。

定義 1 (1) 式で定義された生産関数を有する (4,2,2,1) 経済において，(K,L) を所与で正値の資本と労働の初期保有とする。α_1,α_2 を正の支出係数とする。次の条件 (a), (b), (c) を満たす価格と配分の組 $\big((\omega^*,(p_i^*)_{i=1}^4),\ ((Y_i^*,K_i^*,L_i^*,M_{i3}^*,M_{i4}^*)_{i=1}^2,(M_3^*,K_3^*,L_3^*,M_{34}^*),$ $(M_4^*,K_4^*,L_4^*))\big)$ をサプライチェーン C を有する生産の一般均衡という。

(a) 各 $i=1,2$ について，$(Y_i^*,K_i^*,L_i^*,M_{i3}^*,M_{i4}^*)$ は次の問題の解である。

$$\max p_i^*Y_i-(K_i+\omega^*L_i+p_3^*M_{i3}+p_4^*M_{i4}) \text{ subject to } Y_i=F_i(K_i,L_i,M_{i3},M_{i4}).$$

(b) $(M_3^*,K_3^*,L_3^*,M_{34}^*)$ は次の問題の解である。

$$\max p_3^*M_3-(K_3+\omega^*L_3+p_4^*M_{34}) \text{ subject to } M_3=F_3(K_3,L_3,M_{34}).$$

(c)　(M_4^*, K_4^*, L_4^*) は次の問題の解である。

$$\max p_4^* M_4 - (K_4 + \omega^* L_4) \text{ subject to } M_4 = F_3(K_4, L_4).$$

(d)　次の需給バランスが成立する。

$$\begin{cases} K_1^* + K_2^* + K_3^* + K_4^* = K \\ L_1^* + L_2^* + L_3^* + L_4^* = L, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_i^* = \alpha_i (K + \omega^* L),\ i = 1, 2 \\ M_3^* = M_{13}^* + M_{23}^* \\ M_4^* = M_{14}^* + M_{24}^* + M_{34}^* \end{cases}$$

定理 1　仮定 1, 2 を前提とする。サプライチェーン C を有する (4,2,2,1) 経済において，生産の一般均衡が存在する。

補助定理 1　TFP の変化は賃金レンタル率や各部門の資本労働比率に影響を及ぼさない。A_3 の増加は財価格レンタル比率と中間生産物価格レンタル比率を下落させ，中間生産物への需要を増加させる。A_i の増加は第 i 財価格レンタル比率を下落させる。

［均衡の存在証明］

前サブセクションの各セクターのサイズの決定によって，任意の ω にたいして $p_i(\omega), i = 1, 2, 3, 4$ がきまり，

$$\begin{aligned} &K_i(\omega), L_i(\omega), i = 1, 2, 3, 4, \quad M_{ij}(\omega), i = 1, 2, 3, j = 3, 4, i \neq j \\ &Y_i(\omega), i = 1, 2, M_3(\omega), M_4(\omega) \end{aligned}$$

は各部門の利潤最大化をもたらし，かつ，財市場を均衡させる。労働市場の均衡は

$$L = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega) + L_4(\omega)$$

によって表現される。この式の右辺に前節までに得られたものを代入すると，

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{\eta_1 \alpha_1}{\omega} + \frac{\eta_2 \alpha_2}{\omega} + \frac{\eta_3 (\alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2)}{\omega} + \frac{\eta_4 \left(\alpha_1 (\gamma_1 + \gamma_3 \delta_1) + \alpha_2 (\gamma_2 + \gamma_3 \delta_2) \right)}{\omega} \right) \\ &\quad \times (K + \omega L) \\ &= \left(\frac{\alpha_1 (\eta_1 + \eta_3 \delta_1 + \eta_4 (\gamma_1 + \gamma_3 \delta_1)) + \alpha_2 (\eta_2 + \eta_3 \delta_2 + \eta_4 (\gamma_2 + \gamma_3 \delta_2))}{\omega} \right) (K + \omega L) \end{aligned}$$

となる。従って労働市場を均衡させる賃金レンタル比率 ω^* は

$$\omega^* = \frac{1 - (\alpha_1 (\eta_1 + \eta_3 \delta_1 + \eta_4 (\gamma_1 + \gamma_3 \delta_1)) + \alpha_2 (\eta_2 + \eta_3 \delta_2 + \eta_4 (\gamma_2 + \gamma_3 \delta_2)))}{\alpha_1 (\eta_1 + \eta_3 \delta_1 + \eta_4 (\gamma_1 + \gamma_3 \delta_1)) + \alpha_2 (\eta_2 + \eta_3 \delta_2 + \eta_4 (\gamma_2 + \gamma_3 \delta_2))} k \tag{16}$$

となる。ただし，$k = K/L$ である。資本市場の均衡はワルラス法則から成立する。∎

(2), (4), (8) と (16) から，補助定理 1 は明らかである。

3　サプライチェーン経済への集計

3.1　サプライチェーン

サプライチェーンを仮想的な主体として把握できるかを考察する。その際，前節で得られたすべての変数が ω の関数として与えられる状況から出発する。いま，(13)，(14) により

$$\begin{aligned}
\frac{M_{i3}(\omega)}{M_3(\omega)} &= \frac{\alpha_i\delta_i}{\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2}\left(=\beta_{i3}\quad \text{とする}\right),\quad i=1,2\\
\frac{M_{i4}(\omega)}{M_4(\omega)} &= \frac{\alpha_i\gamma_i}{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\gamma_3(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)}\left(=\beta_{i4}\quad \text{とする}\right),\quad i=1,2\\
\frac{M_{34}(\omega)}{M_4(\omega)} &= \frac{\gamma_3(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)}{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\gamma_3(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)}\left(=\beta_{34}\quad \text{とする}\right)
\end{aligned}$$

を定義する。最初の目標は，サプライチェーンの振る舞いが一人の生産者による最大化行動と見ることが可能かどうかを検討することである。

定義 2 ［生産者としてのサプライチェーン］ ω を任意に与えられた正の賃金レンタル比率とする。サプライチェーン C を有する $(4,2,2,1)$-経済の資本と労働の需要関数 $K_i(\omega), L_i(\omega), i=1,2,3,$ が 2.3 節にあるように与えられているとする。いま，

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_i(\omega) &= K_i(\omega)+\beta_{i3}K_3(\omega)+(\beta_{i3}\beta_{34}+\beta_{i4})K_4(\omega), i=1,2\\
\tilde{L}_i(\omega) &= L_i(\omega)+\beta_{i3}L_3(\omega)+(\beta_{i3}\beta_{34}+\beta_{i4})L_4(\omega), i=1,2
\end{aligned}$$

と定義する。一次同次関数 $\hat{F}_i(\hat{K}_i,\hat{L}_i)$ が存在して，つぎの二条件を満たすとき，サプライチェーン i（C^i）が生産者として振る舞うという。このとき $\hat{F}_i$ をサプライチェーン i の**集計生産関数**であるという。

(m)［最大化整合性］　組 $\left(\tilde{K}_i(\omega),\tilde{L}_i(\omega)\right)$ は

$$\max_{\hat{K}_i,\hat{L}_i} p_i(\omega)\hat{F}_i(\hat{K}_i,\hat{L}_i)-\left(\hat{K}_i+\omega\hat{L}_i\right)$$

の解である, $i=1,2$。ここで，$p_i(\omega)$ は (10) で与えられたものである。

(q)［生産量整合性］　任意の正の数 ω に関して

$$F_i(K_i(\omega),L_i(\omega),M_{i3}(\omega),M_{i4}(\omega))=\hat{F}_i(\tilde{K}_i(\omega),\tilde{L}_i(\omega))$$

が成り立つ, $i=1,2$。

この定義は，架空の生産者が第 i 財生産部門と中間財生産部門の一部を集計した最適行動をとることを述べている。そのとき，サプライチェーン i の集計生産関数は $\hat{F}_i$ であり，架空の生産者の最適行動が，個別の部門の行動と整合的であることを要求している。

次の関係に着目しておく。

$$\begin{aligned}\beta_{i3}\beta_{34}+\beta_{i4}=&\frac{\alpha_i\delta_i}{\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2}\frac{\gamma_3(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)}{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\gamma_3(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)}\\&+\frac{\alpha_i\gamma_i}{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\gamma_3(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)}\\=&\frac{\alpha_i(\delta_i\gamma_3+\gamma_i)}{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\gamma_3(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)},\ i=1,2\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\tilde{K}_i(\omega)=&\big(\theta_i\alpha_i+\beta_{i3}\theta_3(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)\\&+(\beta_{i3}\beta_{34}+\beta_{i4})\left(\alpha_1(\gamma_1+\gamma_3\delta_1)+\alpha_2(\gamma_2+\gamma_3\delta_2)\right)\theta_4\big)(K+\omega L)\\=&\big(\theta_i\alpha_i+\alpha_i\delta_i\theta_3+\alpha_i(\delta_i\gamma_3+\gamma_i)\theta_4\big)(K+\omega L)\\\tilde{L}_i(\omega)=&\big(\eta_i\alpha_i+\beta_{i3}\eta_3(\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2)\\&+(\beta_{i3}\beta_{34}+\beta_{i4})\left(\alpha_1(\gamma_1+\gamma_3\delta_1)+\alpha_2(\gamma_2+\gamma_3\delta_2)\right)\eta_4\big)\frac{(K+\omega L)}{\omega}\\=&\big(\eta_i\alpha_i+\alpha_i\delta_i\eta_3+\alpha_i(\delta_i\gamma_3+\gamma_i)\eta_4\big)\frac{K+\omega L}{\omega}\\\frac{\tilde{K}_i(\omega)}{\tilde{L}_i(\omega)}=&\frac{\theta_i\alpha_i+\alpha_i\delta_i\theta_3+\alpha_i(\delta_i\gamma_3+\gamma_i)\theta_4}{\eta_i\alpha_i+\alpha_i\delta_i\eta_3+\alpha_i(\delta_i\gamma_3+\gamma_i)\eta_4}\omega\\=&\frac{\theta_i+\delta_i\theta_3+(\delta_i\gamma_3+\gamma_i)\theta_4}{\eta_i+\delta_i\eta_3+(\delta_i\gamma_3+\gamma_i)\eta_4}\omega\end{aligned}$$

得られた最終式の分母に着目して，

$$\begin{aligned}\eta_i+\delta_i\eta_3+&(\delta_i\gamma_3+\gamma_i)\eta_4=1-\theta_i-\gamma_i-\delta_i+\delta_i(1-\theta_3-\gamma_3)+(\delta_i\gamma_3+\gamma_i)(1-\theta_4)\\&=1-\theta_i-\gamma_i-\delta_i\theta_3-\delta_i\gamma_3+(\delta_i\gamma_3+\gamma_i)-\theta_4(\delta_i\gamma_3+\gamma_i)\\&=1-\theta_i-\delta_i\theta_3-(\delta_i\gamma_3+\delta_i)\theta_4\\&=1-(\theta_i+\delta_i\theta_3+(\delta_i\gamma_3+\delta_i)\theta_4)\end{aligned}$$

である。したがって，

$$\hat{\theta}_i=\theta_i+\delta_i\theta_3+(\delta_i\gamma_3+\delta_i)\theta_4, i=1,2 \tag{17}$$

と定義すれば，

$$\frac{\tilde{K}_i(\omega)}{\tilde{L}_i(\omega)}=\frac{\hat{\theta}_i}{1-\hat{\theta}_i}\omega$$

となる。

ここで，

$$\hat{F}_i(\hat{K}_i, \hat{L}_i) = \hat{A}_i \hat{K}_i^{\hat{\theta}_i} \hat{L}_i^{1-\hat{\theta}_i},\ i = 1, 2$$

と定義する。$\hat{A}_i$ を次のように決める。$\hat{K}_i$, $\hat{L}_i$ にそれぞれ $\tilde{K}_i(\omega)$, $\tilde{L}_i(\omega)$ を代入して，

$$F_i(K_i(\omega), L_i(\omega), M_{i3}(\omega), M_{i4}(\omega)) = \hat{F}_i(\tilde{K}_i(\omega), \tilde{L}_i(\omega))) \tag{18}$$

がω の恒等式となるように $\hat{A}_i$ を決定する。これは，定義 2 の生産量整合性 (q) の成立を要求するものである。まず,，

$$\begin{aligned}
p_4 &= \frac{1}{f_{4k}} = \frac{1}{\theta_4 A_4} {k_4}^{1-\theta_4} = \frac{1}{A_4} \left(\frac{1}{\theta_4}\right)^{\theta_4} \left(\frac{\omega}{\eta_4}\right)^{\eta_4} \\
\left(\frac{\gamma_i}{p_4}\right)^{\gamma_i} &= (\gamma_i A_4)^{\gamma_i} (\theta_4)^{\gamma_i \theta_4} \left(\frac{\eta_4}{\omega}\right)^{\gamma_i \eta_4} \\
p_3 &= \frac{1}{A_3} \left(\frac{1}{\gamma_3 A_4}\right)^{\gamma_3} \left(\frac{1}{\theta_3}\right)^{\theta_3} \left(\frac{1}{\theta_4}\right)^{\theta_4 \gamma_3} \left(\frac{\omega}{\eta_3}\right)^{\eta_3} \left(\frac{\omega}{\eta_4}\right)^{\eta_4 \gamma_3} \\
\left(\frac{\delta_i}{p_3}\right)^{\delta_i} &= (\delta_i A_3)^{\delta_i} (\gamma_3 A_4)^{\delta_i \gamma_3} (\theta_3)^{\delta_i \theta_3} (\theta_4)^{\delta_i \theta_4 \gamma_3} \left(\frac{\eta_3}{\omega}\right)^{\delta_i \eta_3} \left(\frac{\eta_4}{\omega}\right)^{\delta_i \eta_4 \gamma_3}
\end{aligned}$$

である。(18) 式左辺 (LHS) は，(15) より

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= A_i \alpha_i (K + \omega L) {\theta_i}^{\theta_i} \left(\frac{\eta_i}{\omega}\right)^{\eta_i} \left(\frac{\delta_i}{p_3}\right)^{\delta_i} \left(\frac{\gamma_i}{p_4}\right)^{\gamma_i} \\
&= A_i \alpha_i (K + \omega L) {\theta_i}^{\theta_i} {\eta_i}^{\eta_i} \left(\frac{1}{\omega}\right)^{\eta_i + \delta_i(\eta_3 + \eta_4 \gamma_3) + \gamma_i \eta_4} \\
&\quad \times \left(\delta_i A_3 (\gamma_3 A_4)^{\gamma_3} (\theta_3)^{\theta_3} (\theta_4)^{\theta_4 \gamma_3} {\eta_3}^{\eta_3} {\eta_4}^{\gamma_3 \eta_4}\right)^{\delta_i} \left(\gamma_i A_4 (\theta_4)^{\theta_4} (\eta_4)^{\eta_4}\right)^{\gamma_i} \\
&= A_i \alpha_i (K + \omega L) {\theta_i}^{\theta_i} \left(\delta_i A_3 (\gamma_3 A_4)^{\gamma_3} (\theta_3)^{\theta_3} (\theta_4)^{\theta_4 \gamma_3}\right)^{\delta_i} \left(\gamma_i A_4 (\theta_4)^{\theta_4} (\eta_4)^{\eta_4}\right)^{\gamma_i} \\
&\quad \times {\eta_i}^{\eta_i} \left({\eta_3}^{\eta_3} {\eta_4}^{\gamma_3 \eta_4}\right)^{\delta_i} \left(\frac{1}{\omega}\right)^{\eta_i + \delta_i(\eta_3 + \eta_4 \gamma_3) + \gamma_i \eta_4} \\
&= A_i (\delta_i A_3)^{\delta_i} (\gamma_3 A_4)^{\gamma_3 \delta_i} (\gamma_i A_4)^{\gamma_i} \alpha_i (K + \omega L) {\theta_i}^{\theta_i} {\theta_3}^{\delta_i \theta_3} {\theta_4}^{\theta_4 \gamma_3 \delta_i + \gamma_i \theta_4} \\
&\quad \times {\eta_i}^{\eta_i} {\eta_3}^{\eta_3 \delta_i} {\eta_4}^{\gamma_3 \eta_4 \delta_i + \eta_4 \gamma_i} \left(\frac{1}{\omega}\right)^{\eta_i + \delta_i(\eta_3 + \eta_4 \gamma_3) + \gamma_i \eta_4}
\end{aligned}$$

である。ここで，$(1/\omega)$ の冪は

$$\eta_i + \delta_i(\eta_3 + \eta_4 \gamma_3) + \gamma_i \eta_4 = 1 - \hat{\theta}_i$$

であることに注意をしておく。さらに，右辺 (RHS) は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= \hat{A}_i \left(\tilde{K}_i(\omega)\right)^{\hat{\theta}_i} \left(\tilde{L}_i(\omega)\right)^{1-\hat{\theta}_i} \\
\tilde{K}_i &= \big(\theta_i\alpha_i + \alpha_i\delta_i\theta_3 + \alpha_i(\delta_i\gamma_3 + \gamma_i)\theta_4\big)(K + \omega L) \\
&= \alpha_i\hat{\theta}_i(K + \omega L) \\
\tilde{L}_i &= \big(\eta_i\alpha_i + \alpha_i\delta_i\eta_3 + \alpha_i(\delta_i\gamma_3 + \gamma_i)\eta_4\big)\frac{K + \omega L}{\omega} \\
&= \alpha_i(1 - \hat{\theta}_i)\frac{K + \omega L}{\omega} \\
\mathrm{RHS} &= \hat{A}_i\alpha_i(K + \omega L)\frac{\hat{\theta}_i^{\hat{\theta}_i}\left(1 - \hat{\theta}_i\right)^{1-\hat{\theta}_i}}{\omega^{1-\hat{\theta}_i}}
\end{aligned}
$$

となる。$\hat{\theta}_i$ の定義によって，LHS と RHS の ω の冪は一致している。したがって，LHS と RHS に共通する $\alpha_i(K + \omega L)$ の項をキャンセルすれば，ω の冪は一致する。したがって，(18) が恒等式となる必要十分条件は

$$
\hat{A}_i = A_i(\delta_i A_3)^{\delta_i}(\gamma_3 A_4)^{\gamma_3\delta_i}(\gamma_i A_4)^{\gamma_i}\frac{{\theta_i}^{\theta_i}{\theta_3}^{\delta_i\theta_3}{\theta_4}^{\theta_4\gamma_3\delta_i+\gamma_i\theta_4}{\eta_3}^{\eta_3\delta_i}{\eta_4}^{\gamma_3\eta_4\gamma_i+\gamma_i\eta_4}{\eta_i}^{\eta_i}}{\hat{\theta}_i^{\hat{\theta}_i}\left(1 - \hat{\theta}_i\right)^{1-\hat{\theta}_i}} \tag{19}
$$

である。(19) を $\hat{A}_i$ の定義とする。$\hat{\theta}_i$ の定義 (17) 式と $\hat{A}_i$ によって関数 $\hat{F}_i$ が決まる。そこで，最大化問題

$$
\max_{\tilde{K}_i, \tilde{L}_i} p_i\hat{F}_i(\tilde{K}_i, \tilde{L}_i) - \left(\tilde{K}_i + \omega\tilde{L}_i\right) \tag{20}
$$

を考える。最大化の必要十分条件は

$$
\omega = p_i\hat{F}_{iL}(\tilde{K}_i, \tilde{L}_i), \quad p_i = \frac{1}{\hat{F}_{iK}(\tilde{K}_i, \tilde{L}_i)}
$$

である。$\tilde{k}_i = \tilde{K}_i/\tilde{L}_i$ とすると，この条件は

$$
\omega = \frac{1 - \hat{\theta}_i}{\hat{\theta}_i}\tilde{k}_i, \quad p_i = \frac{\tilde{k}_i^{1-\hat{\theta}_i}}{\hat{\theta}_i\hat{A}_i} \tag{21}
$$

と書きかわる。$\tilde{k}_i(\omega) = \tilde{K}_i(\omega)/\tilde{L}_i(\omega)$ と $p_i(\omega)$ がこの等式 (21) を満たすことを示せば，$(\tilde{K}_i(\omega), \tilde{L}_i(\omega))$ は価格 $(\omega, p_i(\omega))$ のもとで，最大化問題 (20) の解となる。$\tilde{k}_i =$

$\tilde{K}_i(\omega)/\tilde{L}_i(\omega)$ は，(21) の最初の等式を満たす。第 2 の等式の成立をしめそう。(10) と (19) によって，

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{k}_i^{1-\hat{\theta}_i}}{\hat{\theta}_i \hat{A}_i} &= \frac{\left(\dfrac{\tilde{K}_i(\omega)}{\tilde{L}_i(\omega)}\right)^{1-\hat{\theta}_i}}{\hat{\theta}_i \hat{A}_i} = \frac{\left(\frac{\hat{\theta}_i}{1-\hat{\theta}_i}\right)^{1-\hat{\theta}_i} \omega^{1-\hat{\theta}_i}}{\hat{\theta}_i \hat{A}_i} \\
&= \left(\frac{1}{\hat{\theta}_i}\right)^{\hat{\theta}_i} \left(\frac{1}{1-\hat{\theta}_i}\right)^{1-\hat{\theta}_i} \omega^{1-\hat{\theta}_i} \frac{1}{\hat{A}_i} \\
&= p_i(\omega)
\end{aligned}
$$

となる。以上によって次の定理を得る。

定理 2　(17) と (19) によって $\hat{\theta}_i$, $\hat{A}_i$ を定めると $\hat{F}_i$ はサプライチェーン i の集計生産関数となり，サプライチェーン i は生産者として振る舞う。(19) 式はサプライチェーン内の技術の相互依存を表現するものである。

3.2　サプライチェーン経済の均衡

前節で得られたサプライチェーン i の集計生産関数 $\hat{F}_i$, $i = 1, 2$ の下で次の均衡を定義する。

定義 3　支出係数を α_1, α_2 とする。資本と労働のストックの初期保有を (K, L) とする。前節で得られたサプライチェーン i の生産関数を $\hat{F}_i$, $i = 1, 2$ とする。以下の条件 (i), (ii) を満たす価格と配分の組 $\left((\hat{p}_{r1}^*, \hat{p}_{r2}^*, \hat{\omega}^*), (\hat{Y}_i^*, \hat{K}_i^*, \hat{L}_i^*)_{i=1}^2\right)$ を，サプライチェーン経済の均衡と呼ぶ。

(i)　各 $i = 1, 2$ について，$(\hat{Y}_i^*, \hat{K}_i^*, \hat{L}_i^*)$ は次の問題

$$
\max_{Y_i, K_i, L_i} \hat{p}_{ri}^* Y_i - K_i - \hat{\omega}^* L_i \quad \text{subject to } Y_i = \hat{F}_i(K_i, L_i)
$$

の解である。

(ii)　次の要素市場の均衡と財市場の均衡がある。

$$
\begin{aligned}
&\hat{K}_1^* + \hat{K}_2^* = K, \\
&\hat{L}_1^* + \hat{L}_2^* = L \\
&\hat{p}_{ri}^* F_i(\hat{K}_i^*, \hat{L}_i^*) = \alpha_i(K + \hat{\omega}^* L), i = 1, 2
\end{aligned}
$$

サプライチェーン経済は (2,2,2) 経済であることに注意せよ。

定理 3　次の二つが成立する。

[Existence] サプライチェーン経済の均衡 $\left((p_1^*, p_2^*, \hat{\omega}^*),\ (\hat{Y}_i^*, \hat{K}_i^*, \hat{L}_i^*)_{i=1}^2\right)$ は存在する。

[Consistency] 三部門経済の均衡を $\left((\omega^*, p_{r1}^*, p_{r2}^*, p_{r3}^*),\ ((Y_i^*, K_i^*, L_i^*, M_i^*)_{i=1}^2, (Y_3^*, K_3^*, L_3^*))\right)$ とする。三部門経済の均衡とサプライチェーン経済の均衡 $\left((p_1^*, p_2^*, \hat{\omega}^*),\ (\hat{Y}_i^*, \hat{K}_i^*, \hat{L}_i^*)_{i=1}^2\right)$ との間に，次の整合性

$$\hat{\omega}^* = \omega^* = \frac{1 - \alpha_1\hat{\theta}_1 - \alpha_2\hat{\theta}_2}{\alpha_1\hat{\theta}_1 + \alpha_2\hat{\theta}_2}k, \tag{22}$$

$$\hat{p}_i^* = p_i^*, i = 1, 2, \tag{23}$$

$$\hat{Y}_i^* = \hat{F}_i(\hat{K}_i^*, \hat{L}_i^*) = F_i(K_i^*, L_i^*, M_i^*) = Y_i^*,\ i = 1, 2 \tag{24}$$

が存在する。

［証明］サプライチェーン経済の均衡存在から確かめる。サプライチェーン i の最大化の必要条件より，

$$\hat{\omega} = \frac{1 - \hat{\theta}_i}{\hat{\theta}_i}\hat{k}_i, \quad \hat{p}_{ri}\hat{f}_i(\hat{k}_i) = \frac{\hat{k}_i}{\hat{\theta}_i}, \quad i = 1, 2$$

である。$\hat{f}_i = \hat{F}_i(\hat{k}_i, 1), i = 1, 2$ である。$\hat{k}_i = \hat{K}_i/\hat{L}_i, \hat{\rho}_i = \hat{L}_i/L, \hat{\omega}, \hat{p}_{ri}$ のように ^ を付しているのはサプライチェーン経済における変数であることを明示するためである。財市場の均衡条件を利用すると，資本市場の均衡は

$$\begin{aligned} k = \hat{\rho}_1\hat{k_1} + \hat{\rho}_2\hat{k_2} &= \hat{\theta}_1\hat{\rho}_1\hat{p}_{r1}\hat{f}_1(\hat{k}_1) + \hat{\theta}_2\hat{\rho}_2\hat{p}_{r2}\hat{f}_2(\hat{k}_2) \\ &= (\hat{\theta}_1\alpha_1 + \hat{\theta}_2\alpha_2)(k + \hat{\omega}) \end{aligned}$$

である。この等号を成立させる $\hat{\omega}^*$ が存在し，したがって，サプライチェーン経済の均衡が存在する。また，(16) を見ると，

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^* &= \frac{1 - \alpha_1\hat{\theta}_1 - \alpha_2\hat{\theta}_2}{\alpha_1\hat{\theta}_1 + \alpha_2\hat{\theta}_2}k \\ &= \frac{1 - (\alpha_1(\theta_1 + \theta_3\gamma_1) + \alpha_2(\theta_2 + \theta_3\gamma_2))}{\alpha_1(\theta_1 + \theta_3\gamma_1) + \alpha_2(\theta_2 + \theta_3\gamma_2)}k = \omega^* \end{aligned}$$

が成立する。これは (22) である。財価格レンタル比率 $\hat{p}_{ir}^*$ は

$$\hat{p}_{ri}(\hat{\omega}^*) = \frac{1}{\hat{A}_i\hat{\theta}_i}\left(\frac{\hat{\theta}_i}{1 - \hat{\theta}_i}\hat{\omega}^*\right)^{1-\hat{\theta}_i}, i = 1, 2$$

である。(9) 式，$\hat{A}_i$ の定義によって，次を得る。

$$\begin{aligned}\hat{p}^*_{ri} &= \frac{1}{\hat{A}_i}\left(\frac{1}{\hat{\theta}_i}\right)^{\hat{\theta}_i}\left(\frac{1}{1-\hat{\theta}_i}\right)^{1-\hat{\theta}_i}(\hat{\omega}^*)^{1-\hat{\theta}_i} \\ &= \frac{1}{A_i A_3{}^{\gamma_i}}\frac{1}{\theta_i{}^{\theta_i}\eta_i{}^{\eta_i}\gamma_i{}^{\gamma_i}\eta_3{}^{\gamma_i\eta_3}\theta_3{}^{\gamma_i\theta_3}}(\hat{\omega}^*)^{1-\hat{\theta}_i} = p^*_i\end{aligned}$$

これは (23) である。さらに，定理 2 より，$\hat{F}_i$ はサプライチェーン生産関数であるから，

$$\hat{F}_i(\hat{K}^*_i, \hat{L}^*_i) = Y^*_i,\ i = 1, 2$$

も成立している。∎

4 (3,3,3) 経済の (1,2,1) 経済への集計

前節で得たサプライチェーン i の生産関数は $\hat{F}_i$ である。それを再述すれば，

$$\hat{F}_i(\hat{K}_i, \hat{L}_i) = \hat{A}_i \hat{K}_i^{\hat{\theta}_i} \hat{L}_i^{1-\hat{\theta}_i},\ i = 1, 2$$

である。$\hat{\theta}_i, \hat{A}_i$ はそれぞれ (**??**)，(19) 式で定義される。正の資源 (K, L) と正の支出係数 α_1, α_2 が与えられているとする。その下での中間生産生産セクターを含む (3,3,3) 経済の均衡と (2,2,2) 経済であるサプライチェーン下の均衡を，それぞれ

$$\begin{aligned}&\left((\omega^*, p^*_{r1}, p^*_2, p^*_3), ((Y^*_i, K^*_i, L^*_i, M^*_i)^2_{i=1}, (Y^*_3, K^*_3, L^*_3))\right), \\ &\left((\hat{p}^*_{ri})^2_{i=1}, \hat{\omega}^*),\ (\hat{Y}^*_i, \hat{K}^*_i, \hat{L}^*_i)^2_{i=1}\right)\end{aligned}$$

とする。定理 3 はこれらの均衡間に整合性が存在することを明らかにした。(2,2,2) 経済であるサプライチェーン経済を (1,2,1) 経済に集計することにかかわって，次の 2 課題がある。

課題 1　(2,2,2) 経済であるサプライチェーン経済を (1,2,1) 経済に整合的に集計することができ，もとの (3,3,3) 経済，(2,2,2) 経済であるサプライチェーン経済，さらに集計された (1,2,1) 経済の間に整合性があるか，

課題 2　中間財生産セクターを含む (3,3,3) 経済を，(2,2,2) 経済への統合を経由せずに，(1,2,1) 経済に集計することが可能であるか，
可能であれば，2 種類の統合された (1,2,1) 経済は整合的であるか，

である。

定義 4 (1) 式で定義された生産関数を有する (3,3,3) 経済において，(K, L) を任意に与えられた正値の資本と労働の初期保有とする。 α_1, α_2 を正の支出係数とする。価格と配分の組 $\big((\omega^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*);\ ((Y_i^*, K_i^*, L_i^*, M_i^*)_{i=1}^2, (Y_3^*, K_3^*, L_3^*))\big)$ を中間生産物生産セクターを含む生産の一般均衡とする。ある集計生産関数 $\check{F}(\check{K}, \check{L}) = \check{A}\check{K}^{\theta^*}\check{L}^{1-\theta^*}$ が存在して，以下の条件 (i), (ii) を満たす価格と配分の組 $((\check{p}_r^*, \check{\omega}^*), (Y^*, K, L))$ を, 集計された (1,2,1) 経済の均衡と呼ぶ。

最大化：(Y^*, K, L) は次の問題

$$\max_{\check{Y}_i, \check{K}_i, \check{L}_i} \check{p}_r^*\check{Y} - \check{K} - \check{\omega}^*\check{L} \ \text{ subject to } \check{Y} = \check{F}(\check{K}, \check{L})$$

の解である。

生産と価格の集計整合性：生産量間と賃金レンタル比率の間に次の整合性がある。

$$\begin{aligned}\check{p}_r^* Y^* &= p_1^* Y_1^* + p_2^* Y_2^*, \\ \omega^* &= \check{\omega}^*.\end{aligned}$$

この定義は，定理 3 での整合性の要求と同種のものである。

Dfhisy(2021) の定理 2 を利用する。それによれば，生産関数[*1]

$$\check{F}(\check{K}, \check{L}) = \check{A}\check{K}^{\theta^*}\check{L}^{1-\theta^*}$$

を有する (1,2,1) 経済に統合するには，(1,2,1) 経済の集計生産関数のパラメータそして集計物価レンタル比率をそれぞれ,

$$\theta^* = \alpha_1\hat{\theta}_1 + \alpha_2\hat{\theta}_2 \tag{25}$$

$$\check{A} = \prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{A}_i\hat{\theta}_i^{\hat{\theta}_i}(1-\hat{\theta}_i)^{1-\hat{\theta}_i}}{\theta^{*\theta^*}(1-\theta^*)^{1-\theta^*}}\right)^{\alpha_i} \tag{26}$$

$$p_r^* = p_1^{*\alpha_1} p_2^{*\alpha_2} \tag{27}$$

と定義すればよい。Dfhisy(2021) に従うと，さらに,

$$\check{\omega}^* = \frac{1 - \alpha_1\hat{\theta}_1 - \alpha_2\hat{\theta}_2}{\alpha_1\hat{\theta}_1 + \alpha_2\hat{\theta}_2}k \tag{28}$$

と定義すれば，初期保有 (K, L) は問題

$$\max_{\check{K}, \check{L}} \check{p}_r^* F(\check{K}, \check{L}) - \check{K} - \check{\omega}^*\check{L}$$

[*1] 記号 K, L が初期保有として用いられているので，変数を表すために $\tilde{K}, \tilde{L}$ という記号を用いている。

の解であり，(3,3,3) 経済の均衡とサプライチェーン経済の均衡との間の整合性 (23), (24) によって，

$$\begin{aligned}\check{p}_r^* F(K,L) &= \hat{p}_1^* \hat{F}_1(\hat{K}_1^*, \hat{L}_1^*) + \hat{p}_2^* \hat{F}_2(\hat{K}_2^*, \hat{L}_2^*) \\ &= p_1^* F_1(K_1^*, L_1^*, M_1^*) + p_2^* F_2(K_2^*, L_2^*, M_2^*)\end{aligned}$$

となる。これらは集計された (1,2,1) 経済としての数量の整合性に他ならない。さらに，統合された (1,2,1) 経済の賃金レンタル比率 ω^* とサプライチェーン経済の均衡における賃金レンタル比率 $\hat{\omega}^*$ の間には，(22) 式と (28) より，

$$\tilde{\omega}^* = \hat{\omega}^* = \omega^*$$

が成立している。以上の結果をまとめると次の定理となる。

定理 4　(2,2,2) 経済であるサプライチェーン経済を経由して，(1,2,1) 経済に集計することが可能である。(3,3,3) 経済，サプライチェーン経済そしてサプライチェーン経済を集計した (1,2,1) 経済には整合性が存在する。

(27) に示される (1,2,1) 経済の財価格は，つまり物価は，(3,3,3) 経済の財価格の幾何平均になっている。同じように，(25), (26) を (3,3,3) 経済のパラメータによって書き換えると，

$$\theta^* = \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2 + (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)\theta_3 \tag{29}$$

$$\check{A} = {A_1}^{\alpha_1} {A_2}^{\alpha_2} {A_3}^{\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2} \prod_{i=1}^{2} \left(\frac{\hat{\theta}_i^{\hat{\theta}_i}(1-\hat{\theta}_i)^{1-\hat{\theta}_i}}{{\theta^*}^{\theta^*}(1-\theta^*)^{1-\theta^*}} \right)^{\alpha_i} \tag{30}$$

となる。

ここで，例えば日本経済では，中間生産物の比重が大きいこと，つまり，γ_1, γ_2 が高いことを念頭におこう。したがって，その平均値 $\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2$ は大きな値になると期待できる。このとき，集計的な資本分配率 θ^* は部門資本分配率の平均値 $\alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2$ よりもかなり大きな値となると予想される。つまり，

$$\theta^* = \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2 + (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)\theta_3 > \theta_i, i = 1, 2$$

が成立する事が予想される。また，$\gamma_i > \alpha_j,\ i, j = 1, 2$ は十分予想できるので，

$$\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 > \alpha_i, i = 1, 2$$

の成立も蓋然的である。

さらに，(29) では A_3 の冪は $\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2$ である。したがって，中間生産物部門の TFP（A_3）の増加が集計 TFP（$\check{A}$）の増加に大きく寄与することが予想される。TFP が時間に依存し，他のパラメータが時間に変化しなければ，

$$\frac{\dot{\check{A}}}{\check{A}} = \alpha_1\frac{\dot{A}_1}{A_1} + \alpha_2\frac{\dot{A}_2}{A_2} + (\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2)\frac{\dot{A}_3}{A_3}$$

が得られ，A_3 の増加の集計 TFP 増加への寄与が高いことも予想される。これらの数値の確定には実証研究を俟つ必要がある。

5　まとめ

本稿では (3,3,3) 経済を集計経済としての二種類の表現を与えた。すなわち，個々の生産部門における個々の最適行動から, サプライチェーンの振る舞いを集計的な生産関数のもとでの最適行動に集約できることを，さらに，それらが一財からなるマクロ経済に集約されることを示した。

サプライチェーン生産関数における TFP は個別 TFP を集計したものである。さらに一財の (1,2,1) 経済における集計生産関数で得られる TFP はサプライチェーン生産関数の TFP をさらに集計したものであると同時に，個別 TFP の集計でもある。これによって，ある生産部門における TFP ショックが，サプライチェーン経済にどのように影響を及ぼし，さらに集計化された経済における産出量にどのような影響を与えるかが, 明らかになった。

残されている課題は次である。

(i) 現在モデルより多数の中間生産物部門を有する経済へ拡張すること，
(ii) 中間生産物の生産に他の中間生産物を必要とする経済に拡張すること，
(iii) 最終生産物生産と中間財生産に用いられる資本が異質である場合に拡張すること，

が考えられる。さらに，前節の最後にある実証研究によって，部門 TFP，部門の資本分配率，支出係数，A_i, θ_i, α_i 等を推定することが，重要であろう。これらの研究によって技術の産業間の連関がより精密な理論的実証的な考察を可能にするであろう。また，昨今の災害の状況で出現するサプライチェーンの分断が他の産業に及ぼす影響を明らかにするであろう。

参考文献

[1] Arrow K.J . (1951) "Alternative Proof of the Substitution Theorem for Leontief Models in the General Case," in T.C. Koopmans ed., *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley, pp. 155-164.

[2] Doi, J., T. Fujii, S. Horie, J. Iritani, and M. Yasuoka (2021). "Construction of a Supply Chain Economy", mimeo.

[3] Fan X.-M. and Liu H.-G. (2021). "Global Supply Chain Shifting: A Macro Sense of Production Relocation Based on Multi-Regional Input-Output Table", *Economic Modelling*, 94, pp.672-680.

[4] Felipe J. and Fisher F. M. (2003). "Aggregation in Production Functions: What Applied Economists should Know", *Metroeconomica*, 54(2 & 3), pp.208-262.

[5] May K. (1946). "The Aggregation Problem for a One-Industry Model", *Econometrica*, 14(4), pp.285-298.

[6] Hayashi F. and Prescott E.C. (2002). "The 1990s in Japan: A Lost Decade", *Review of Economic Dynamics*, 5, pp.206-235.

[7] Lee I. and Lee B.-C. (2010) "An Investment Evaluation of Supply Chain RFID Technologies: A Normative Modeling Approach", *International Journal of Production Economics*, vol.125, pp.313-323.

[8] May K. (1946). "The Aggregation Problem for a One-Industry Model", *Econometrica*, 14(4), pp.285-298.

[9] Samuelson P.A. (1951) "Abstruct of a Theorem concerning Substitutablity in Open Leontief Models," in T.C. Koopmans ed., *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley, pp. 142-146.

[10] Shin S. and Eksioglu B. (2015) "An Empirical Study of RFID Productivity in the U.S. Retail Supply Chain," *International Journal of Production Economics*, vol.163, pp.89-96.

[11] 猪俣 哲史, 内田 陽子, 孟 渤 (2011) 「国際産業連関分析から見た世界経済危機」『産業連関』第 19 巻第 1 号, pp.80-89.

[12] 土居 潤子, 藤井 隆雄, 堀江 進也, 入谷 純, 佐藤 純恵, 安岡 匡也 (2021) 「集計経済の構築 —集計 TFP と物価—」 mimeo.

[13] 林山 泰久, 阿部 雅浩, 坂本 直樹 (2012) 「多地域多部門応用一般均衡モデルによる東

日本大震災のマクロ経済的被害の計測 (特集 復興への視座：新しい時代を拓くために)」『総合政策論集：東北文化学園大学総合政策学部紀要』第 11 巻第 1 号, pp.159-190.

[14] 深尾 京司 (2010) 「日本の産業レベルでの TFP 上昇率：JIP データベースによる分析」RIETI Policy Discussion Paper Series 10-P-012.

[15] OECD(2010) "Trade in intermediate goods," in *Measuring Globalisation: OECD Economic Globalisation Indicators 2010*, OECD Publishing, Paris.